



# Исследование процесса образования зигзагов при распространении усталостной трещины методами континуальной механики повреждений<sup>1</sup>

Семёнов А.С.

*С.-Петербургский государственный технический университет*

Рост усталостной трещины сопровождается многочисленными отклонениями от магистрального направления. Например, значительные зигзагообразные отклонения, особенно заметные на начальной стадии роста трещины, характерны для траекторий трещин, распространяющихся от оснований острых вырезов (см. рис. 1). Наличие

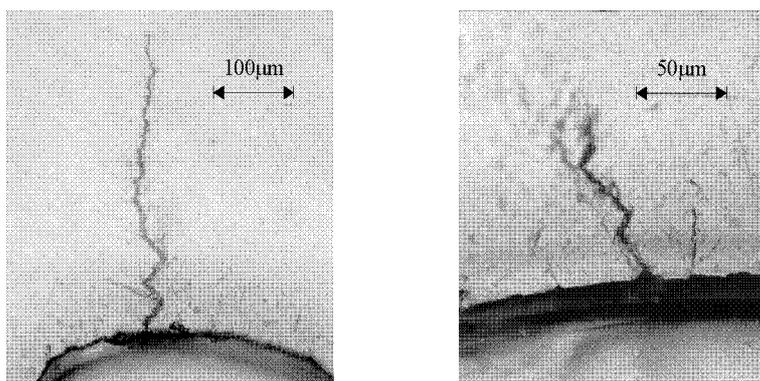


Рис. 1: Траектории усталостных трещин в основании острого выреза

даже незначительных микроотклонений может оказывать заметное влияние на процесс закрытия трещины и таким образом влиять на скорость ее роста. Причинами появления отклонений являются микронеподнородность и анизотропия элементов структуры, наличие дефектов и включений, влияние воздействий среды, неоднородность

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке программы "Государственная поддержка ведущих научных школ РФ" 96-15-96066, а также грантов РФФИ 98-01-000-681 и 98-01-000-681

напряженно-деформированного состояния. В ряде случаев, например при росте трещины в области концентратора напряжений, влияние последней группы причин может оказаться преобладающим, что позволяет подойти к решению проблемы описания роста зигзагообразной трещины методами континуальной механики.

Предложенный подход прогнозирования роста зигзагообразных трещин связан с рассмотрением особенностей распространения трещин усталости на начальном этапе. В процессе роста усталостных трещин наблюдается существование 2-х стадий [1]. На *первой стадии* (стадии Forsyth, стадии сдвиговой трещины, стадии I) направление роста трещины определяется направлением действия максимальных касательных напряжений (см. рис. 2,а). Это направление

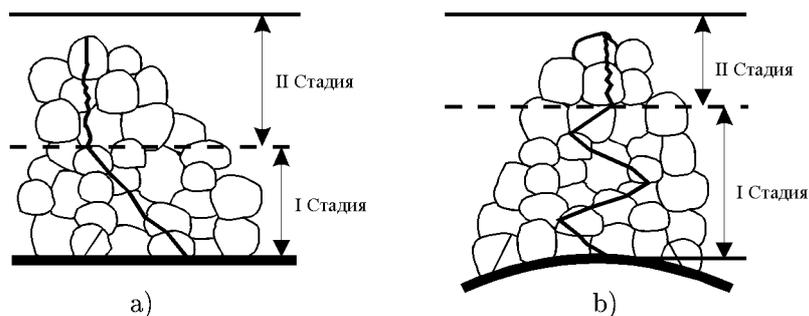


Рис. 2: Схематическое представление траектории усталостной трещины: а) в однородном поле напряжений, б) при наличии концентратора напряжений.

соответствует плоскостям, расположенным под углом  $45^\circ$  к свободной поверхности. Микротрещины усталости, первоначально возникшие в полосах скольжения, продолжают свое развитие в пределах этих полос. С ростом трещины происходит ее переориентация. На *второй стадии* (стадии нормального отрыва, стадии II) направление роста трещины определяется плоскостью действия максимальных растягивающих напряжений (см. рис. 2,а).

Распространение трещины при наличии концентрации напряжений (см. рис. 2,б) имеет более сложный характер, чем в случае однородного напряженного состояния. В рамках предлагаемой модели объяснение причин возникновения зигзагов в окрестности вер-

шины острого выреза связывается с совместным конкурирующим воздействием на рост трещины 2-х источников сингулярности (областей высоких градиентов) напряжений: вершины выреза и вершины трещины. Распределение полей повреждений, инициированных вершиной трещины, вынуждает трещину продолжать прямолинейное наклонное движение. Поврежденность вызванная вершиной выреза стремится развернуть трещину к оси симметрии выреза.

Целью выполненного исследования является проверка принципиальной возможности предсказания образования зигзага методами континуальной механики. Решение этой проблемы выполнено на основе прямого моделирования процесса роста усталостной трещины, направление и скорость роста которой определяются эволюцией поля повреждений. В рамках этого подхода основной задачей описания процесса распространения зигзагообразной трещины является поиск мер поврежденности, позволяющих учитывать микроструктуру материала, наличие развитых зон пластичности и описывать рост усталостных трещин как на I-ой так и на II-ой стадиях.

## **1 Методы описания роста трещины, управляемого эволюцией поврежденности**

### **1.1 Традиционные подходы к анализу роста трещин усталости**

В настоящее время отсутствует единый общепринятый подход описания процесса роста усталостной трещины, пригодный для произвольного режима нагружения и широкого класса материалов, и наблюдается значительное разнообразие в выборе переменных, определяющих скорость распространения трещины. Рассматриваются как глобальные, так и локальные подходы анализа усталостного разрушения. В зависимости от вида определяющих параметров, аналогично классическим теориям прочности, используются силовые, деформационные и энергетические критерии зарождения и роста усталостных трещин. Детальный обзор существующих подходов к анализу процессов усталости представлен в работах [2], [3], [4].

Первоначально исследования проводились в рамках силового подхода при использовании глобального критерия. Основанная на многочисленных экспериментальных исследованиях докритического ро-

ста макротрещин при одноосном циклическом нагружении постоянной амплитуды, широкое распространение получила эмпирическая зависимость  $\frac{da}{dN} = f(\Delta\sigma, a)$ , где  $\Delta\sigma = \sigma_{max} - \sigma_{min}$  – размах изменения номинальных напряжений в пределах цикла нагружения,  $a$  – длина трещины. Часто указанная формула принимает вид простого степенного соотношения  $\frac{da}{dN} = C\Delta\sigma^m a^n$ .

В соответствии с принципом, предложенным в 1961 году Р.С. Paris [5]: "Поскольку при циклическом нагружении напряжения и деформации вблизи трещины полностью определяются КИН и коэффициентом асимметрии цикла, разумно предположить, что всякое событие, происходящее в этой области, контролируется этими параметрами, включая и прирост трещины за цикл нагружения", в практике инженерных расчетов наибольшее распространение получила следующая зависимость, определяющая скорость роста трещины

$$\frac{da}{dN} = f(\Delta K, R), \quad (1)$$

где  $\Delta K = K_{max} - K_{min}$  – размах КИН,  $R = K_{min}/K_{max}$ . Для описания второго (прямолинейного) участка кинетической диаграммы усталостного разрушения Р.С. Paris и F.A. Erdogan [6] предложили упрощенную эмпирическую формулу  $\frac{da}{dN} = C\Delta K^m$ .

Дальнейшие исследования показали, что в ряде случаев уравнение (1) требует модификации. Учет эффектов закрытия трещины приводит к необходимости рассмотрения вместо  $\Delta K$  величины  $\Delta K_{eff} = K_{max} - K_{op} < \Delta K$ . При наличии большой пластической зоны применение параметра линейной механики разрушения  $\Delta K$  может приводить к значительным погрешностям. В этом случае рационально применение таких критериальных параметров нелинейной механики, как размах раскрытия трещины  $\delta$  [7], коэффициент интенсивности деформаций [8],  $J$ -интеграл [9]. В последнем случае обобщением (1) является  $\frac{da}{dN} = f(\Delta J_{eff})$ . Однако методика таких исследований до конца не разработана, а применение этих величин наталкивается на трудности, связанные с адекватным их расчетом и корректным экспериментальным определением.

При описании эффектов малоциклового усталости параметры деформированного состояния оказываются более предпочтительными, чем параметры напряженного состояния. В этом случае используются соотношения [3]  $\frac{da}{dN} = f(\Delta\varepsilon)$ . Поведение коротких и длинных усталостных трещин существенно отличается, особенно при их рас-

пространении в припороговой области. Рост микроструктурно коротких трещин определяется соотношением [10]  $\frac{da}{dN} = A\Delta\gamma_p^\alpha(d-a)$ , где  $A$ ,  $\alpha$  - константы материала,  $\Delta\gamma_p$  - размах сдвиговой пластической деформации,  $d$  - размер превалирующего барьера, вызванного наличием дефектов. Рост физически коротких трещин определяется соотношением [10]  $\frac{da}{dN} = B\Delta\gamma_p^\beta a - C$ .

## 1.2 Применение нелокальных подходов континуальной механики повреждений

В качестве величины, определяющей скорость роста трещины, вместо единого для всей конструкции, традиционно вводимого в рамках глобального подхода механики разрушения скалярного параметра разрушения ( $\Delta K$ ,  $\Delta J$ ,  $\Delta\delta$ , ...), используется непрерывно распределенная по пространству функция поврежденности  $D(x, y, z; t)$ , характеризующая меру (плотность, вероятность) накопленных повреждений в каждой точке материала. Более общие варианты анализа процессов повреждений связаны с рассмотрением тензорных мер поврежденности [11], [12], [13], представляющих собой обычно коэффициенты разложения в ряд по поверхностным сферическим функциям плотности распределения микроповреждений по ориентациям. Однако в рассматриваемом случае, исключая влияние повреждений на эффективные модули материала, достаточно ограничиться введением скалярной меры повреждений и непосредственным анализом ее углового распределения.

Использование концепции континуальных повреждений позволяет естественным образом описывать эффекты изменения направления роста трещины, учитывать эффекты сложной истории изменения нагрузки и различные виды напряженного состояния, использовать единое описание стадии зарождения и распространения трещины, выполнять анализ распространения как микротрещин, так и макротрещин.

В рамках рассматриваемого подхода приращение длины трещины за цикл нагружения определяется как множество точек (вдоль предопределенного направления роста трещины) для которых поврежденность достигла критического значения  $D = 1$ . Изменение поврежденности определяется кинетическими уравнениями эволю-

ционного типа

$$\frac{dD}{dN} = h(D, B), \quad (2)$$

где  $B$  - параметр напряженно-деформированного состояния, выбор которого определяется рассмотрением конкретного механизма разрушения. Если правая часть (2) не зависит от  $D$ , то приходим к правилу линейного суммирования повреждений  $\frac{dD}{dN} = h(B)$ . В работе [14] показано, что даже для простейшего закона линейного суммирования повреждений, уравнение для скорости роста усталостной трещины (аналог уравнения (1)) имеет сложную структуру, содержащую функциональную зависимость в правой части

$$\frac{da}{dN} = f\{D\}. \quad (3)$$

Корректный анализ поведения усталостных трещин, учитывающий их рост на стадии коротких трещин, приводит к необходимости учета микроструктуры материала. В этом случае предполагается, что элементарный акт разрушения затрагивает некоторый представительный объем материала (зерно, структурный элемент) в целом, а не одну материальную точку и процесс разрушения определяется всем напряженно-деформированным состоянием этого объема.

Впервые нелокальный критерий разрушения был предложен в 1907 году в работе К. Weighard [15]. Первое практическое применение и установление связи с микроструктурой материала сделано Н. Neuber [16], [17]. Оригинальная физическая интерпретация критерия предложена В.В. Новожиловым [18], [19]. Различные варианты осреднения рассмотрены в [20]. Приложение этого подхода к анализу роста коротких усталостных трещин в форме " $d^*$ -концепции" предложено в [21]. В соответствии с этой идеей рост усталостной трещины определяется уравнениями [21]

$$\frac{d\bar{D}}{dN} = \frac{(\Delta\bar{\varepsilon} - \Delta\varepsilon_{th})^n}{C}, \quad \Delta\bar{\varepsilon} = \frac{1}{d^*} \int_0^{d^*} \Delta\varepsilon dr, \quad (4)$$

где  $d^*$  - микроструктурная константа материала [16]. На основе соотношений (4) может быть получено явное аналитическое выражение

для скорости распространения трещины (для  $n = 2$ ) в виде [22]

$$\frac{da}{dN} = C_1 \frac{(\Delta K)^{5/2}}{E^2 R_e^{1/2} d^{*1/4}} \left[ 1 - \left( \frac{\Delta K_{th}}{\Delta K} \right)^{1/2} \right], \quad (5)$$

где  $\Delta K$  - размах коэффициента интенсивности напряжений,  $C_1, E, R_e, d^*, \Delta K_{th}$  - константы материала.

Обобщением (4) на случай, позволяющий учесть различные механизмы разрушения, является представление

$$\frac{d\bar{D}}{dN} = \frac{(\Delta\bar{B} - \Delta B_{th})^n}{C}, \quad \Delta\bar{B} = \frac{1}{d^*} \int_0^{d^*} \Delta B dr. \quad (6)$$

В качестве меры напряженно-деформированного состояния  $B$  могут быть использованы как инвариантные к местоположению трещины параметры представляющие собой тензорные инварианты, так и неинвариантные параметры, определение которых основано на введении системы координат жестко связанной с трещиной.

### 1.3 Критерии определения направления роста трещины

Рост прямолинейной трещины может быть однозначно описан изменением одной скалярной величины - длиной трещины  $a$ . Учет изменения ориентации трещины требует включения дополнительных параметров. При решении двумерных задач описание изменения ориентации трещины может быть учтено рассмотрением угла  $\psi$ , который определяет отклонение от первоначального направления роста трещины. Для нахождения этого угла вводятся дополнительные уравнения, выражающие условие экстремальности специальной характеристики напряженно-деформированного состояния в окрестности вершины трещины:

$$\left. \frac{\partial B(\varphi)}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=\psi} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 B(\varphi)}{\partial \varphi^2} \right|_{\varphi=\psi} < 0 \text{ (или } > 0). \quad (7)$$

Разрушение начнется в направлении экстремального значения  $B$  и когда экстремум достигнет некоторого критического значения.

#### Направление роста трещины при однократном нагружении

Для определения начального направления роста трещины при однократном неадиабатическом нагружении (mixed mode) предложен ряд критериев. Среди них наибольшее распространение получили: критерий максимума растягивающих окружных напряжений [23]  $B = \sigma_\varphi$ , максимума интенсивности освобождения упругой энергии [24]  $B = G$ , минимума плотности энергии деформации [25]  $B = \lim_{r \rightarrow 0} 2\pi r W$ , максимума  $J_r$ -интеграла  $B = J_r = \int_C (W n_r - \sigma_{ij} n_j u_{i,r}) ds$  [26], максимума потока энергии  $B = \Gamma_k$  [27].

### Направление роста трещины при циклическом нагружении

В процессе роста усталостных трещин наблюдается существование 2-х стадий [1]. На стадии I (стадии Forsyth, стадии сдвиговой трещины) направление роста трещины является близким к действию максимальных касательных напряжений (см. рис. 2,а). Это направление соответствует плоскостям расположенным под углом  $\sim 45^\circ$  к свободной поверхности. Микротрещины усталости, первоначально возникшие в полосах скольжения, продолжают свое развитие в пределах этих полос. В каждом отдельном зерне поликристалла имеется достаточное количество потенциальных систем активного скольжения, позволяющих задействовать плоскости, наиболее благоприятно ориентированные для реализации сдвига. С ростом трещины происходит переориентация трещины. На стадии II (стадии нормального отрыва) направление роста трещины определяется плоскостью близкой к действию максимальных растягивающих напряжений (см. рис. 2,а).

Критерии, определяющие направление роста усталостной трещины на II-й стадии, совпадают с критериями применяемыми при анализе однократного нагружения, описанными выше. Проблема феноменологического описания направления роста трещины на I-й стадии не исследовалась и ее решение требует разработки специальных критериев. При отсутствии трещины на этапе зарождения направление начального роста трещины определяется направлением действия максимальных касательных напряжений. Однако при появлении трещины, вносящей искажение в распределение полей напряжений и деформаций, это условие требует уточнения.

Формулировка феноменологического критерия роста может быть выполнена на основе выбора меры поврежденности, демонстрирующей экстремальные свойства в угловом распределении для заданно-

го направления. В качестве одного из возможных вариантов такой меры может быть рассмотрено эквивалентное напряжение  $B = \sigma_{eq}$ , соответствующее критерию прочности С.О. Mohr

$$\sigma_{eq} = (1 - \gamma)|\tau_{r\varphi}| + \gamma\sigma_{\varphi}. \quad (8)$$

Параметр  $\gamma$  находится из условия роста трещины в заданном направлении. Для описания направления роста усталостной трещины на I стадии величина  $\gamma$  может быть найдена аналитически в рамках линейной механики разрушения. В этом случае, как установлено в [28],  $\gamma = \frac{1}{1+3|K_{III}|/K_I}$ . Для трещины наклоненной под углом  $45^\circ$  к направлению действия растягивающей нагрузки  $\gamma = \frac{1}{4}$ . Определение  $\gamma$  при учете пластических свойств материала требует применения численных методов [14]. В этом случае  $\gamma$  перестает быть постоянной и монотонно возрастает при увеличении длины трещины (см. рис. 6,а). Введение меры повреждения в форме (8) позволяет описать единым образом все 3 стадии развития усталостной трещины

$$\gamma = \begin{cases} 0, & \text{зарождение,} & \sigma_{eq} = |\tau_{r\varphi}| \\ f(a) \in ]0, 1[, & \text{I стадия роста,} & \sigma_{eq} = (1 - \gamma)|\tau_{r\varphi}| + \gamma\sigma_{\varphi} \\ 1, & \text{II стадия роста,} & \sigma_{eq} = \sigma_{\varphi} \end{cases} \quad (9)$$

Угловое распределение напряжений вокруг вершины наклонной трещины, полученное в рамках линейной механики разрушения, представлено на рис. 3. Прямолинейное распространение наклонной трещины ( $\varphi = 0$ ) на I-й стадии обеспечивает только критерий (8). Максимальное главное напряжение  $\sigma_I$  и эквивалентное напряжение  $\sigma_{eq} = (1 - \delta)\sigma_i + \delta tr\sigma_{kl}$ , соответствующее критерию прочности Nadai, обладают локальным максимумом в  $0^\circ$ , однако существует и другой максимум при  $\varphi \approx 135^\circ$ , являющийся глобальным, что должно приводить к неизбежному отклонению трещины от прямолинейного пути. Величина окружных напряжений  $\sigma_{\varphi}$  демонстрирует максимум при угле  $\varphi = \arccos \frac{3}{5} \approx 53^\circ$ . Этот критерий дает хорошие оценки для прогнозов стадии II. Однако прямолинейного роста наклонной трещины на стадии I не описывает, предсказывая развитие трещины в направлении близком к вертикальному.

Аналогично (8) в качестве меры поврежденности может быть рассмотрена эквивалентная деформация  $\varepsilon_{eq}$

$$\varepsilon_{eq} = (1 - \beta)|\varepsilon_{r\varphi}| + \beta\varepsilon_{\varphi}. \quad (10)$$

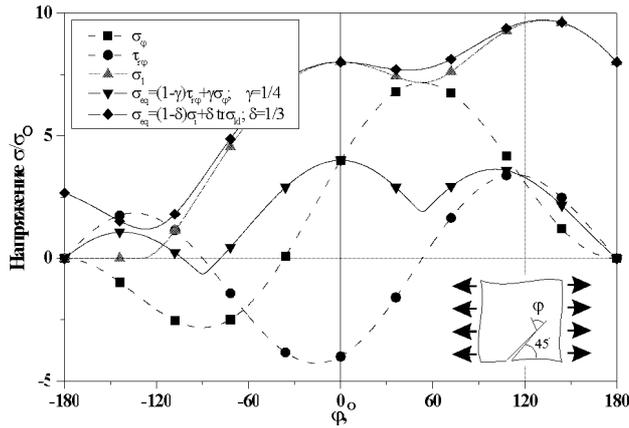


Рис. 3: Угловое распределение окружных, касательных, главных и эквивалентных напряжений вокруг вершины наклонной трещины

В рамках линейной механики разрушения величина  $\beta$  может быть найдена аналитически. В этом случае, как установлено в [14],  $\beta = \frac{1}{1 + \frac{3+\nu}{1+\nu} |K_{II}|/K_I}$ . Для трещины наклоненной под углом  $45^\circ$  к направлению действия растягивающей нагрузки  $\beta = \frac{1+\nu}{4+2\nu}$ . В рамках нелинейной механики разрушения при учете упруго-пластических свойств материала определение  $\beta$  требует привлечения численных методов для решения нелинейной краевой задачи [14].

#### 1.4 Описание процесса образования зигзага

В основе рассматриваемой модели роста зигзагообразной трещины лежит предположение о том, что процесс образования зигзага вызывается конкурирующим изменением величин 2-х локальных максимумов в угловом распределении поврежденности в окрестности вершины трещины.

Рассмотрим угловое распределение поврежденности в вершине трещины в процессе ее роста. Типичные зависимости для трещин

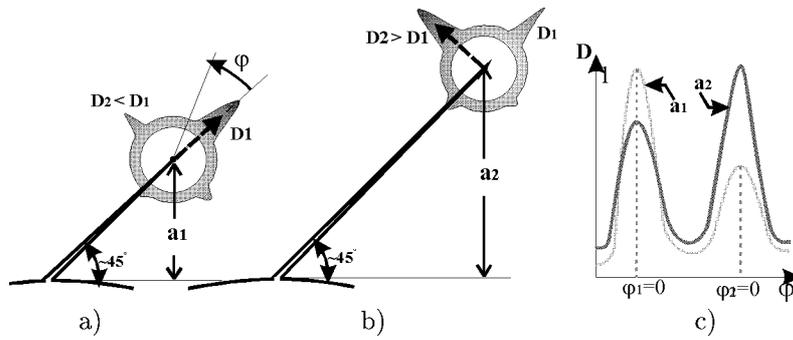


Рис. 4: Схематическое представление процесса изменения ориентации трещины. Модель образования зигзага основана на конкурирующем изменении величин 2-х локальных максимумов в угловом распределении поврежденности в окрестности вершины трещины

распространяющихся в основании острого выреза представлены на рис. 4. Два локальных максимума соответствуют  $\varphi_1 \approx 0^\circ$  и  $\varphi_2 \approx 90^\circ$ . Первоначально доминирует максимум поврежденности  $D_1$  при  $\varphi_1$  инициированный самой трещиной и движущий ее прямолинейно (см. рис. 4,а). С ростом трещины в направлении отличным от сонаправленного с вертикальной осью симметрии влияние поврежденности от выреза становится более заметным, и второй пик  $D_2$  может превысить первый (см. рис. 4,б). Что приводит к внезапному изменению ориентации трещины при достижении трещиной критической длины. Подтверждение возможности реализации описанного сценария образования зигзага при решении конкретных задач представлено в следующем разделе.

## 2 Численное моделирование процесса роста зигзагообразной трещины

Целью выполненного исследования является проверка принципиальной возможности предсказания образования зигзага методами континуальной механики на основе подхода предложенного выше и уточнение деталей его реализации (выбор адекватных характе-

ристик напряженно - деформированного состояния для описания процесса накопления усталостных повреждений, анализу различных сценариев роста трещины, установлению факторов, определяющих размер зигзага), а так же сравнение полученных результатов с экспериментальными данными.

## 2.1 Геометрия, свойства материала и условия нагружения образца с вырезом

Рассматривается процесс роста усталостной трещины в основании острого выреза прямоугольной пластины (см. рис. 5) под действием циклически изменяющегося изгибающего момента. Материал рас-

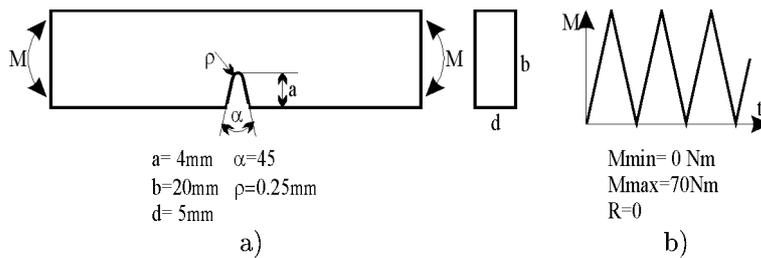


Рис. 5: Геометрия (a) и условия нагружения (b) пластины с V-образным вырезом.

смаатриваемых образцов - сталь METASAFE-900 [21]. Аппроксимация диаграммы пластического деформирования выполнялась на основе использования закона Romberg-Osgood  $\varepsilon_{eq} = \frac{\sigma_{eq}}{E} + \left(\frac{\sigma_{eq}}{F}\right)^m$ .

## 2.2 Вычислительные процедуры

Анализ роста усталостной трещины выполнен на основе прямого математического моделирования (cycle-by-cycle) рассматриваемого процесса. Решение нелинейной краевой задачи осуществляется при помощи метода конечных элементов с использованием программ MARC [29] и FEA [30]. Разработана программа Crackgen [14], позволяющая выполнять автоматическую генерацию конечно-элементной сетки и параметров решения нелинейных задач со сложной историей циклического нагружения для объектов содержащих криволи-

нейные трещины. Программа **Crackgen** позволяет производить рекуррентное сгущение сетки на основе создания самоподобных вложенных структур. Особенности произведенных расчетов являются: использование широкого спектра определяющих уравнений упруго-пластического материала, детальное описание процесса контакта берегов трещины сложной формы, адаптивный анализ момента возникновения зигзага и последующее перестроение конечно-элементной сетки. При помощи разработанной программы **Crackan** [14] на основе распределения полей напряжений и деформаций и истории их изменения осуществляется вычисление значений поврежденности с использованием как локальных, так и нелокальных критериев, выполняется угловой поиск направления экстремальной поврежденности в окрестности вершины трещины, вычисляется направление и скорость роста трещины, производится расчет числа циклов до разрушения.

### 2.3 Меры поврежденности

В целях дальнейшего сравнительного анализа вводятся в рассмотрение три различных меры поврежденности в соответствии с нелокальным критерием разрушения (6) и различными характеристиками напряженно-деформированного состояния (8) и (10):

1. Поврежденность на основе осредненных эквивалентных напряжений

$$\bar{D}_1 = \frac{1}{d^*} \int_0^{d^*} [(1 - \gamma)|\tau_{r\varphi}| + \gamma\sigma_\varphi] dr. \quad (11)$$

2. Поврежденность на основе размаха осредненных эквивалентных деформаций

$$\bar{D}_2 = \frac{1}{d^*} \int_0^{d^*} [(1 - \beta)|\Delta\varepsilon_{r\varphi}| + \beta\Delta\varepsilon_\varphi] dr. \quad (12)$$

3. Поврежденность на основе истории изменения размаха в пределах цикла осредненных эквивалентных деформаций

$$\frac{d\bar{D}_3}{dN} = \frac{\left\{ \frac{1}{d^*} \int_0^{d^*} [(1 - \alpha)|\Delta\varepsilon_{r\varphi}| + \alpha\Delta\varepsilon_\varphi] dr - \Delta\varepsilon_{th} \right\}^n}{C}. \quad (13)$$

Рассмотрение различных концепций мер поврежденности, описывающих выбор ориентации роста усталостной трещины, вызвано отсутствием в современной литературе единого подхода к этому вопросу. Традиционные методы определения ориентации трещины при монотонном нагружении связаны с анализом напряженного состояния. Поэтому была рассмотрена первая мера поврежденности (11). Использование второго соотношения (12) связано с ее широким применением для определения скорости роста усталостных трещин, включающим случаи коротких трещин, трещин в основании острых вырезов. Применение третьего параметра (11) представляется перспективным с позиции создания единой теории описания процесса развития трещины на основе одного параметра поврежденности, определяющего как скорость роста, так и направление распространения.

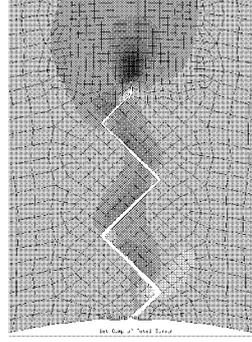
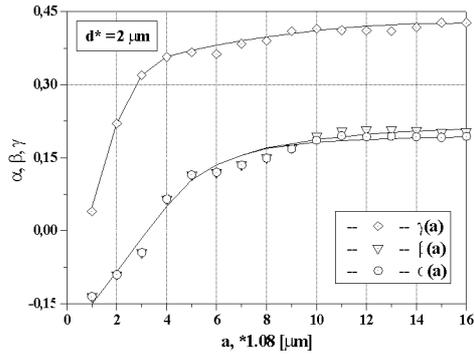
## 2.4 Зарождение и начальный рост трещины

Место зарождения трещины определяется условием максимума поврежденности и располагается в вершине выреза. Направление начального роста усталостной трещины на I стадии, как экспериментально установлено в работе [1], ориентировано под углом  $45^\circ$  к свободной поверхности. Как показали результаты расчетов, все введенные в рассмотрение меры поврежденности (11)-(13) позволяют точно предсказать место зарождения и начальное направление роста трещины путем выбора параметров  $\alpha, \beta, \gamma$ . Например  $\gamma = 0$  при  $a = 0$ , что эквивалентно применению  $\tau_{r\varphi}$ .

При появлении трещины, вносящей искажение в распределение полей напряжений и деформаций, параметры  $\alpha, \beta, \gamma$ , полученные на этапе зарождения не обеспечивают дальнейшего прямолинейного роста наклонной трещины. Изменение параметров  $\alpha, \beta, \gamma$  при увеличении длины трещины может быть найдено на основе решения краевой задачи о растяжении пластины без выреза из условия прямолинейного роста под углом  $\varphi = -45^\circ$  к свободной поверхности в пределах I стадии роста усталостной трещины. Результаты решения этой задачи представлены на рис. 6,а. (см. рис. 6,б).

## 2.5 Образование 1-го зигзага

Угловое распределение параметров поврежденности в окрестности вершины трещины имеет характерную 2-х горбую зависимость (см.



a)

b)

Рис. 6: а) изменение  $\alpha, \beta, \gamma$  с ростом трещины, б) распределение  $\epsilon_I$ .

рис. 7,а). Изначально в угловом распределении параметров, характеризующих поврежденность, доминирует направление, соответствующее дальнейшему прямолинейному росту трещины под углом  $45^\circ$  к вертикали ( $\varphi = 0^\circ$ ). При проведении вычислительных экспериментов установлено, что в процессе роста трещины происходит уменьшение относительного преобладания 1-го максимума ( $\varphi = 0^\circ$ ), соответствующего прямолинейному росту, по сравнению с величиной 2-го локального максимума ( $\varphi = 80^\circ$ ). В процессе роста трещины возникает момент, когда 2-й максимум становится равным 1-му и в дальнейшем начинает преобладать. В этот момент трещина изменяет скачком свое направление и образуется зигзаг. Важно отметить, что в соответствии с рассматриваемым механизмом образования зигзага ориентация трещины изменяется скачкообразно на величину, близкую к  $90^\circ$ , что подтверждается экспериментами.

Результаты расчетов показали, что все рассмотренные меры (11)-(13) имеют в угловом распределении наличие 2-х максимумов (2-х горбый вид) и в процессе роста трещины демонстрируют возможность образования зигзага, связанного с переходом преобладания поврежденности в направлении ортогональном начальному. Однако

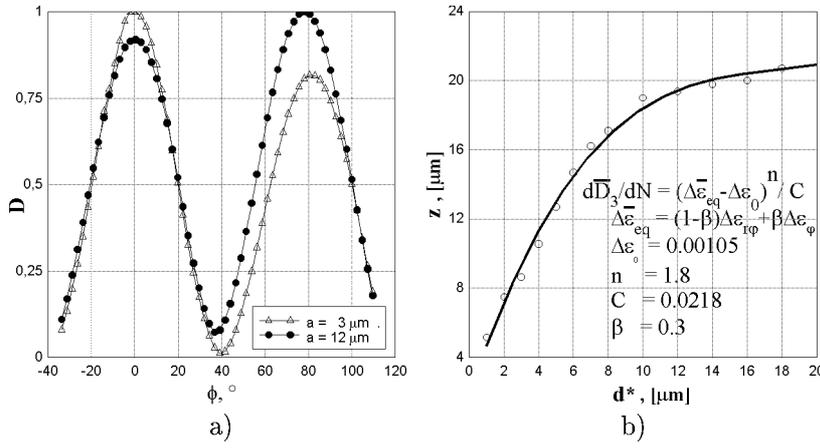


Рис. 7: а) эволюция углового распределения поврежденности  $D_3$  в процессе роста наклонной трещины; б) зависимость длины зигзага  $z$  от микроструктурного параметра  $d^*$ .

этот эффект наблюдается у разных мер поврежденности при различных диапазонах параметра  $d^*$ . При использовании силового параметра  $\bar{D}_1 = \bar{\sigma}_{eq}$  и параметра учитывающего историю изменения амплитуды деформаций  $\bar{D}_3 \{ \overline{\Delta\varepsilon_{eq}} \}$  (см. уравнения (11) и (13)) появление зигзага (длиной до  $40 \mu\text{m}$ ) наблюдается при  $d^*$  меньших  $30 \mu\text{m}$ , а при использовании деформационного параметра (12)  $\bar{D}_2 = \overline{\Delta\varepsilon_{eq}}$  наблюдается зигзаг при значениях  $d^*$  больших  $50 \mu\text{m}$ . Наиболее ярко (перепад максимумов достигает 20%) явление образования зигзага наблюдается при использовании мер  $\bar{D}_1$  и  $\bar{D}_3$ . При незначительном преобладании одного из максимумов, как в случае использования  $\bar{D}_2$ , образование зигзага имеет неустойчивый характер, что приводит к контролю момента появления зигзага вторичными факторами (например микроструктурой).

В результате проведения вычислительных экспериментов установлено, что размер зигзага  $z$  однозначно определяется величиной  $d^*$ . Зависимость  $z$  от  $d^*$  для меры поврежденности  $\bar{D}_3$  представлена на рис. 7,б. Она имеет монотонно-возрастающий характер. Параметр  $\alpha$  оказывает влияние на вид связи  $z-d^*$ . При увеличении  $\alpha$  при постоянном  $d^*$  размер зигзага  $z$  уменьшается. При малых  $d^*$  зависи-

мость  $z$  от  $d^*$  близка к линейной с коэффициентом пропорциональности 1. Для рассматриваемых образцов из стали METASAFE-900 с  $d^* \approx 17\mu m$  [21] результаты расчетов в случае плоского напряженного состояния дают нижнюю границу оценки величины зигзага  $z_{\text{пнс}} \approx 21\mu m$ , а в случае плоского деформированного состояния оценку сверху  $z_{\text{пдс}} \approx 55\mu m$ , в сравнении с экспериментально наблюдаемыми значениями  $z = 20 \div 40\mu m$ .

## 2.6 Образование 2-го и последующих зигзагов

Процесс образования 2-го зигзага происходит аналогично рассмотренному выше процессу возникновения 1-го зигзага. Отличие заключается в определенном влиянии 1-го зигзага на появление 2-го. Это влияние естественным образом учитывается при моделировании процесса роста трещины на основе анализа распределения полей поврежденности и истории их изменения. В результате расчетов установлено, что в случае постоянных значений параметров  $\alpha, \beta, \gamma$ , длина 2-го и последующих участков зигзагообразной трещины приблизительно в 2 раза больше 1-го. Таким образом наблюдается определенная симметрия размахов зигзага относительно оси симметрии образца с вырезом. При учете зависимости параметров  $\alpha, \beta, \gamma$  от длины трещины в соответствии с рис. 6,а наблюдается затухание, контролируемое выбором параметра  $d^*$ . При рассмотрении коррекции зависимости параметров  $\gamma$  и  $\beta$  от длины трещины в соответствии с переходом от стадии I к стадии II наблюдается быстрый непрерывный разворот траектории по направлению вдоль оси симметрии образца.

## 3 Сравнение прогнозов усталостной долговечности для прямолинейной и зигзагообразной трещин

Сравнение результатов расчета напряженно-деформированного состояния прямолинейной трещины и трещины с 4 зигзагами показало, что в пределах зигзагообразной части наблюдаются значительные отличия. Эти отличия постепенно уменьшаются, стремясь к нулю, на прямолинейном участке трещины. Размах в пределах цикла

осредненных главных значений тензора деформации  $\Delta\overline{\varepsilon}_I$  в вершине зигзагообразной трещины на участке с зигзагами в два раза **меньше** соответствующих значений для прямолинейной трещины. Аналогичные результаты наблюдаются при анализе осредненных главных значений тензора напряжений и плотности энергии деформации.

Кардинально противоположная картина наблюдается при анализе введенных эквивалентных мер напряженно - деформированного состояния. Размах в пределах цикла осредненных эквивалентных деформаций  $\Delta\overline{\varepsilon}_{eq} = (1 - \beta)\Delta\overline{\varepsilon}_{r\varphi} + \beta\Delta\overline{\varepsilon}_{\varphi} = \overline{D}_2$  при значении  $\beta = 0.3$  зигзагообразной трещины на непрямолинейном участке приблизительно в два раза **больше** соответствующих значений для прямолинейной трещины. Аналогичный эффект наблюдается и при рассмотрении эквивалентных напряжений  $\overline{\sigma}_{eq} = (1 - \gamma)\overline{\sigma}_{r\varphi} + \gamma\overline{\sigma}_{\varphi} = \overline{D}_1$  при значении  $\gamma = 0.25$ . Таким образом, уже на основе анализа напряженно-деформированного состояния может быть установлено, что появление зигзагообразных отклонений в траектории трещины, растущей в условии плоского напряженного состояния, оказывает различное влияние на рост трещины I-ой и II-ой стадиях. Наличие зигзагов ускоряет рост трещины на I-ой стадии (контролируемый параметрами  $\Delta\overline{\varepsilon}_{eq}$  или  $\overline{\sigma}_{eq}$ ) и приводит к замедлению роста трещины на II-ой стадии (контролируемого параметрами  $\Delta\overline{\varepsilon}_I$  или  $\overline{\sigma}_I$ ). Последний вывод качественно согласуется с результатами исследований других авторов [31], [3], выполненных для трещин на II-ой стадии.

Непосредственное вычисление скорости роста было выполнено на основе прямого моделирования процесса роста трещин, контролируемого эволюцией поврежденности. В целях получения более полного представления об отличиях процессов роста прямолинейной и зигзагообразной трещин была проведена серия многовариантных расчетов с учетом различных факторов: числа зигзагов ( $n_z : 0 \div 5$ ), длины зигзага ( $z : 40 \div 60\mu m$ ), типа упрочнения материала (изотропное, кинематическое, комбинированное), величины амплитуды нагрузки ( $\Delta M$ ), асимметрии цикла ( $R : 0 \div 0.17$ ), наличия односторонней четырехкратной перегрузки, трения между берегами трещины ( $\mu : 0 \div 0.2$ ). В таблице 1 представлены результаты расчетов для случая когда поврежденность, контролирующая рост трещины, вычислялась на основе использования главных значений тензора деформации  $D_3 \{ \Delta\overline{\varepsilon}_I \}$  ( $\alpha = 1$ ).

Таблица 1: Влияние геометрических параметров трещины, характеристик материала и режимов нагружения на скорость роста трещины. Сравнение числа циклов в пределах длины зигзагообразного участка ( $a = n_z z / 1.4142$ ) зигзагообразной и прямолинейной трещин

$n_z$	$z$ [ $\mu m$ ]	Упрочнение	$\Delta M$ [ $kNm$ ]	R	$\mu$	Число циклов		$\frac{N_z}{N_s}$
						Прямолинейная трещина $N_s$	Зигзагообразная трещина $N_z$	
<b>1</b>	40	комб	70	0	0	1011	1357	1.34
<b>2</b>	40	комб	70	0	0	1234	1878	1.52
<b>3</b>	40	комб	70	0	0	1443	2467	1.71
<b>4</b>	<b>40</b>	<b>комб</b>	<b>70</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>1662</b>	<b>3024</b>	<b>1.82</b>
<b>5</b>	40	комб	70	0	0	1898	3852	2.03
4	<b>50</b>	комб	70	0	0	2278	4356	1.91
4	<b>60</b>	комб	70	0	0	2737	5446	1.99
4	40	<b>изот</b>	70	0	0	2122	3244	1.53
4	40	<b>кин</b>	70	0	0	772	1718	2.23
4	40	комб	<b>84</b>	0	0	696	1366	1.96
4	40	комб	70	<b>0.17</b>	0	1927	3256	1.69
4	40	комб	<b>70-280</b>	0	0	432	1507	3.49
4	40	комб	70	0	<b>0.2</b>	1665	3054	1.83

В этом случае при увеличении **числа зигзагов** наблюдается прогрессирующее замедление роста трещины. Продолжительность жизни трещины с 5-ю зигзагами ( $n_z = 5$ ) более чем в 2 раза больше, чем у прямолинейной (см. таблицу 1).

Увеличение **размера зигзага** (и соответственно длины анализируемого участка трещины) приводит к увеличению продолжительности времени жизни трещины. Эффект влияния зигзагов  $N_z/N_s$  также возрастает с увеличением длины зигзага.

Выбор модели **упрочнения** оказывает значительное влияние на скорость распространения трещины. Она максимальна при кинематическом упрочнении и минимальна при изотропном. Зигзагообразная трещина менее чувствительна к характеру упрочнения, чем прямолинейная. Поэтому эффект влияния зигзагов  $N_z/N_s$  максимален при кинематическом упрочнении и минимален при изотропном.

Были рассмотрены 3 варианта изменения базового **режима нагружения** ( $M(t)$ : 0-70-0-70-0-70-...[кНм]): увеличение амплитуды на 20% ( $M(t)$ : 0-84-0-84-0-84-...), увеличение максимального момента на 20% при сохранении амплитуды ( $M(t)$ : 0-84-14-84-14-84-...;  $R=0.17$ ), однократная перегрузка при увеличении амплитуды пика в 4 раза по сравнению с номинальным значением ( $M(t)$ : 0-70-0-280-0-70-0-70-...). Первый и третий режим нагружения уменьшают продолжительность жизни трещины, второй увеличивает по сравнению с базовым случаем. Чувствительность зигзагообразных трещин к таким вариациям в нагрузке меньше, чем у прямолинейных.

Учет трения между берегами трещины не оказывает значительного влияния на продолжительность жизни зигзагообразной трещины. При трении с коэффициентом  $\mu = 0.2$  (сталь/сталь) она возрастает всего на 3%.

Величина  $N_z^*/N_s^*$  в момент разрушения определяется относительной долей этапов зарождения и роста трещин в общей продолжительности жизни трещины. Если стадия зарождения трещины составляет 40% долговечности трещины [21], то в момент разрушения для трещин с 1-м зигзагом  $N_z^*/N_s^* = 1.14$ , а 5-ю зигзагами  $N_z^*/N_s^* = 1.43$ . Таким образом для трещин, скорость роста которых определяется на основе  $D_3 \{\Delta \bar{\epsilon}_I\}$  (или  $D_3 \{\Delta \bar{\epsilon}_{eq}\}$  при  $\alpha = 1$ ), отличие в долговечности может превышать 40%. Проведенный аналогичным образом сравнительный анализ для трещин, скорость роста которых определяется на  $D_3 \{\Delta \bar{\epsilon}_{eq}\}$  при  $\alpha = \alpha(a)$ , отличие в долговечности может так же достигать 40%, что указывает на актуальность проведенных исследований.

## Список литературы

- [1] Forsyth P.J.E. The physical basis of metal fatigue. London: Blackis & Sons. 1969.
- [2] Fatemi A., Zang L. Cumulative fatigue damage and life prediction theories: a survey of the state of art for homogeneous materials // Int. J. Fatigue. 1998. V. 20. N 1. P. 9-34.
- [3] Механика разрушения и прочность материалов / Под ред. Панасюка В.В. / Т. 4. Усталость и циклическая тешиностойкость конструкционных материалов. Романов О.Н., Ярема С.Я., Никифорчин Г.Н. и др. 1990. Киев: Наукова Думка. 680 с.

- [4] Балина В.С., Мядякшас Г.Г. Прочность, долговечность и трещиностойкость конструкций при длительном циклическом нагружении. С.-Петербург: Политехника. 1994. 204 с.
- [5] Paris P.C., Gomey M.P., Anderson W.E. A rational analytic theory of fatigue // *Trend. Eng. Univ. Wash.* 1961. V. 13. N 1. P. 9-14.
- [6] Paris P.C., Erdogan F.A. A critical analysis of crack propagation laws // *Trans ASME. J. Basic. Eng.* 1963. V. 85. N 4. P. 528-534.
- [7] Newman Jr. An evaluation of the plasticity induced crack closure concept and measurement methods // *NASA/TM-1998-208430*. 1998. 26 p.
- [8] Серенсен С.В., Махутов Н.А. Условия инициирования и распространения трещин малоциклового разрушения в зонах концентрации напряжений // *Мех. Деф. тел и конструкций*. М.:Маш. 1975. С.443-448.
- [9] Relation between cyclic J-integral and crack tip opening displacement at low cycle fatigue // *Proc. Low cycle fatigue and elasto-plastic behaviour of materials*. Ed. K-T. Rie, P.D. Portella. 1998. Elsevier. P. 579-584.
- [10] Milller K.J. Metal fatigue - past, current and future // *Proc. Inst. Mech. Eng.* 1991. Preprint N 3. P. 1-14.
- [11] Ромалис Н.Б., Тамуж В.П. Разрушение структурно - неоднородных тел. Рига: Зинатне. 1989. 224 с.
- [12] Lemaitre J. A course on damage mechanics. Springer: Berlin. 1992.
- [13] Lubarda V.A., Krajcinovic D. Damage tensors and the crack density distribution // *Int. J. of Solids and Struct.* 1993. V. 30. P. 2859-2877.
- [14] Semenov A.S. Phänomenologosche und numerische Modellierung der Ausbreitung zick-zackartiger Ermüdungsrisse // *Arbeitsbericht*. TU Dresden. 1999. 172 S.
- [15] Weighardt K. Über das Spalten Zeressen elastischer Körper // *Zeitschr. für Math. und Phys.* 1907. Bd. 55. N 1/2. S. 60-103.
- [16] Neuber H. Kerbspanungslehre. Berlin-Göttingen: Springer. 1958.
- [17] Neuber H. Theoretical determination of fatigue strength at stress concentration // *RTD technical report*. 1967. 23 p.
- [18] Новожилов В.В. О необходимом и достаточном критерии хрупкой прочности // *ПММ*. 1969. Т. 33. N. 2. С. 212-222.
- [19] Новожилов В.В. К основам теории равновесных трещин в хруп-

- ких телах // ПММ. 1969. Т. 33. N. 5. С. 797-812.
- [20] Sewerin A. Mroz Z. On the criterion of damage evolution for variable multiaxial stress states // Int. J. Solids Structures. 1998. V. 35. N 14. P. 1589-1616.
- [21] Sähn S., Pham V.B. The  $d^*$ -concept – a model for description and prognosis of strength phenomena of highly inhomogeneous straining at cyclic loading // Proc. 6th Int. Fatigue Congress. V. 1. 1996. P. 129-134.
- [22] Sähn S. Technische Bruchmechanik. TU Dresden. 1997. 138 p.
- [23] Панасюк В.В., Бережницкий Л.Т. Определение предельных усилий при растяжении пластины с дугообразной трещиной // В кн. Вопросы механики реального твердого тела. Вып. 3. Киев: Наукова думка. 1964. С. 3-19.
- [24] Bueckner H.F. The propagation of cracks and the energy of elastic deformation // Trans ASME. ser. D. 1958. V. 80. N 6. P. 111-116.
- [25] Sih G.C. Strain energy density factor applied to mixed mode crack problems // Int. J. Fracture. 1974. V. 10. N 3. P. 305-321.
- [26] Tirosh J. Incipient fracture angle, fracture loci and critical stress for mixed mode loading // Eng. Fracture Mech. 1977. V. 8. N 3. P. 607-613.
- [27] Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. М.:Наука.1974. 640с.
- [28] Semenov A.S., Sähn S., Melnikov B.E. Computer simulation of kinked fatigue crack propagation at sharp notches // Proc. 2nd Int. Conf. Nondestructive Testing and Comp. Simulations in Material Science and Eng. Ed. A.I.Melker. Proceeding of SPIE. Washington. V. 3687. P. 427-436. 1999.
- [29] MARC Volume A: Ver.K7.1. MARC analysis research Corporation. 1997.
- [30] FEA–general-purpose program system for finite element analysis of solids and structures mechanics / A.I. Borovkov, A.S. Semenov et al. Proc. Int. Conf. "Optimization of FE Approx."St.Petersburg. 1995. P. 104-105.
- [31] Suresh S. Crack deflection: implication for the growth of long and short fatigue cracks // Metallurgical Trans. A. V. 14A. 1983. P. 2375-2385.